О РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБИХ ТОЧЕК ОДНОЙ СИСТЕМЫ n- МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Хусанов Б.
Доцент кафедры «Высшая математика», Самаркандский Государственный архитектурно строительный Университет

Кулмирзаева Гулрабо Абдуганиевна
Ст.преподавательница кафедры «Высшая математика» СамГАСУ

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + xf^{k}(x), \; x = (x_1, ..., x_n), \qquad (1)$$

где A -постоянная квадратная матрица, $f^{k}(x)$ -скалярная форма степени $k \geq 1$, $\det A \neq 0$, $n \geq 2$.

Распределением изолированных особых точек системы (1) занимались многие авторы, особенно, для случая $n = 2$. [1]

В настоящей заметке выясним количество и тип изолированных особых точек, возможных для системы (1) при $n = 3$.

Будем исследовать распределение изолированных особых точек системы (1) предложении, что собственные числа матрицы A действительные и различные, причем не равны нулю.

Введя линейное преобразование:

$$y = Bx \qquad (2)$$

где y -новый трехмерный вектор, а B -постоянная квадратная матрица преобразования. Так как нас интересует только неособое (невырожденное) преобразование, то $\det B \neq 0$, $x = B^{-1}y$, B^{-1}, обратная матрица к B.

Подставляя (2) в (1), системе (1) можно придать вид:

$$\frac{dy}{dt} = Cy + yf^{k}\left(B^{-1}y\right), \qquad (3)$$

где $C = BAB^{-1}$.

Система (3) имеет тот же вид, что и система (1), но матрица коэффициентов изменилась по формуле (3).

Естественно попытаться при заданной матрице A подобрать матрицу B так, чтобы матрица C приобрела, по возможности, более простой вид. В обычных курсах доказывается, что матрице всегда можно придать вид жордановой нормальной формы [2].

Когда все элементарные делители первой степени (так будет, если все корни характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda E)=0 \qquad (4)$$

различные), матрица C будет иметь диагональный вид, где E -единичная матрица.

Пусть система (1) сведена к виду (2) и матрица диагональная. Если перейти теперь от матричной записи к обычной скалярной записи, то получим канонический вид системы (1)

$$\frac{dy_i}{dt}=\lambda_i y_i+y_i f^k(y_1,y_2,y_3), \qquad (5)$$

$$\text{где } \lambda_i(0)\neq 0,\ \lambda_j(0)\neq\lambda_k(0) \ \text{ при } j\neq k,$$

$$f^k(y_1,y_2,y_3)=\sum_{e+m+n=k} a_{emn}y_1^e y_2^m y_3^n.$$

всюду дальнейшем через $\lambda_i(M)$ обозначим корни характеристического уравнения составленного для изолированной особой точки $M(y_1^0,...,y_n^0)$ системы (5) $\lambda_i(0)$ - собственные числа матрицы A, то есть корни характеристического уравнения (4), составленного для изолированной особой точки $O(0,...,0)$ система (1); a_{emn} -постоянные вещественные коэффициенты. Рассмотрим систему (5) в случаях:

1) $k=2r$ и 2) $k=2r+1$.

Случай $k=2r$. В этом случае система (5) имеет следующие особые точки:

$$O(0,0,0),\ M_{1,2}\left(\pm\sqrt[2r]{-\frac{\lambda_1}{a_{k00}}},0,0\right),\ N_{1,2}\left(0,\pm\sqrt[2r]{-\frac{\lambda_2}{a_{0k0}}},0\right),D_{1,2}\left(0,0,\pm\sqrt[2r]{-\frac{\lambda_2}{a_{0k0}}}\right).$$

В предположении, что $\lambda_1 a_{k00}<0,\ \lambda_2 a_{0k0}<0,\ \lambda_3 a_{00k}<0$ следует

Т е о р е м а 1. Если имело место условие $k=2r,\ \lambda_1 a_{k00}<0,\ \lambda_2 a_{0k0}<0,\ \lambda_3 a_{00k}<0,$ то (5) имеет семь изолированных особых точек, причем четыре из них будут узлы, а остальные три –седла, или наоборот, то есть четыре из них будут седла, а три другие –узлы. В частности, если O -узел, то будет иметь место три узла и четыре седла; если O -седло, то будет иметь место четыре узла и три седла.

Доказательство: Введем обозначения

$$P_i(y_1,y_2,y_2)=\lambda_i y_i+y_i f^k(y_1,y_2,y_3),\ i=\overline{1,3}. \qquad (6)$$

Тогда характеристическое уравнение для изолированной особой точки системы будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} P'_{1y_1}(E)-\lambda & P'_{1y_2}(E) & P'_{1y_3}(E) \\ P'_{2y_1}(E) & P'_{2y_2}(E)-\lambda & P'_{2y_2}(E) \\ P'_{3y_1}(E) & P'_{3y_2}(E) & P'_{3y_3}(E)-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Вычисляя, находим, что

$$\lambda_1(M_{1,2}) = -k\lambda_1(0),\ \lambda_2(M_{1,2}) = \lambda_2 - \lambda_1,\ \lambda_3(M_{1,2}) = \lambda_3 - \lambda_1. \qquad (8)$$

$$\lambda_2(M_{1,2}) = \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2(M_{1,2}) = -k\lambda_2,\ \lambda_3(M_{1,2}) = \lambda_3 - \lambda_2. \qquad (9)$$

$$\lambda_1(D_{1,2}) = \lambda_1 - \lambda_3,\ \lambda_2(D_{1,2}) = \lambda_2 - \lambda_1,\ \lambda_3(D_{1,2}) = -k\lambda_3. \qquad (10)$$

Пусть $\lambda_1(0) > \lambda_2(0) > \lambda_3(0) > 0,$ то есть начало координат системы (5) –неустойчивый узел. Тогда по формулам (8), (9), (10) получим неравенства:

$$\lambda_1(M_{1,2}) < 0,\ \lambda_2(M_{1,2}) < 0,\ \lambda_3(M_{1,2}) < 0. \qquad (11)$$

$$\lambda_1(M_{1,2}) > 0,\ \lambda_2(M_{1,2}) < 0,\ \lambda_3(M_{1,2}) < 0. \qquad (12)$$

$$\lambda_1(D_{1,2}) > 0,\ \lambda_2(D_{1,2}) > 0,\ \lambda_3(D_{1,2}) < 0. \qquad (13)$$

Из неравенств (11), (12). (13) убеждаемся в том, что $M_{1,2}$ -устойчивые узлы, а $N_{1,2}, D_{1,2}$ -седла.

Итак, если начало –узел, то имеем три узла и четыре седла в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть $\lambda_1(0) > \lambda_2(0) > \lambda_3(0) < 0,$ то есть начало координат системы (5) $O(0,0,0)$ -седло. Тогда по формулам (8), (9). (10) получим следующие неравенства:

$$\lambda_1(M_{1,2}) < 0,\ \lambda_2(M_{1,2}) < 0,\ \lambda_3(M_{1,2}) < 0, \qquad (14)$$

$$\lambda_1(N_{1,2}) < 0,\ \lambda_2(N_{1,2}) < 0,\ \lambda_3(N_{1,2}) < 0, \qquad (15)$$

$$\lambda_1(D_{1,2}) > 0,\ \lambda_2(D_{1,2}) > 0,\ \lambda_3(D_{1,2}) > 0. \qquad (16)$$

Из неравенств (14), (15), (16) следует, что $M_{1,2}$ -устойчивый узел, $N_{1,2}$ -седла, а $D_{1,2}$ -неустойчивые узлы.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ имеем три седла и четыре узла, что требовалось доказывать.

Рассмотрим теперь случаи меньшего числа изолированных особых точек системы (5), которые имеют место в следующих семи вариантах:

$$\left.\begin{array}{l}
1.\ \lambda_1 a_{k00} > 0,\ \lambda_2 a_{0k0} > 0,\ \lambda_3 a_{00k} > 0;\\
2.\ \lambda_1 a_{k00} < 0,\ \lambda_2 a_{0k0} > 0,\ \lambda_3 a_{00k} > 0;\\
3.\ \lambda_1 a_{k00} > 0,\ \lambda_2 a_{0k0} < 0,\ \lambda_3 a_{00k} > 0;\\
4.\ \lambda_1 a_{k00} < 0,\ \lambda_2 a_{0k0} < 0,\ \lambda_3 a_{00k} > 0;\\
5.\ \lambda_1 a_{k00} > 0,\ \lambda_2 a_{0k0} > 0,\ \lambda_3 a_{00k} < 0;\\
6.\ \lambda_1 a_{k00} < 0,\ \lambda_2 a_{0k0} > 0,\ \lambda_3 a_{00k} < 0;\\
7.\ \lambda_1 a_{k00} > 0,\ \lambda_2 a_{0k0} < 0,\ \lambda_3 a_{00k} < 0.
\end{array}\right\} \qquad (17)$$

В под случаях (17_4), (17_6), (17_7) система (5) имеет только пять изолированных особых точек, причем в случае $\lambda_1(0) > \lambda_2(0) > \lambda_3(0) > 0$ получим $O,\ M_{1,2}$ -узел, а $N_{1,2}$ -седла, (17_9), (17_6), или O -узел $N_{1,2},\ D_{1,2}$ -седла (17_7).

Если $\lambda_1(0) > \lambda_2(0) > 0,\ \lambda_3(0) < 0,\ M_{1,2}$-узлы, $O,\ N_{1,2}$-седла (17_4), O-седо, $N_{1,2},\ M_{1,2}$ -узлы (17_6), $O,\ N_{1,2}$ -седла, $D_{1,2}$ -узлы (17_7).

Итак, справедлива

Теорема 2. Если при четном k система (1) имеет пять изолированных особых точек, то возможен только один из следующих случаев для их совместного существования:

1) узел четыре седла; 2) седло и четыре узла; 3) три узла и два седла; 4) три седла и два узла.

В под случаях (17_2), (17_3), (17_5) система (5) имеет только три изолированные особые точки, причем справедлива теорема 3, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 3. Если при четном k система (1) имеет три изолированные особые точки, то возможен только один из следующих четырех случаев для их совместного существования:

1) узел и два седла; 2) седло и два узла; 3) три узла; 4) три седла.

Примечание. Случаи меньшого числа изолированных особых точек возникают и при

$$a_{k00} a_{0k0} a_{00k} = 0. \qquad (18)$$

Теоремы 2, 3 имеет место и при условии (18).

Случай $k = 2r + 1.$ Тогда система (5) имеет следующие особые точки:

$O(0,0,0),\ M\left(\sqrt[k]{-\dfrac{\lambda_1}{a_{k00}}},0,0\right),\ N\left(0,\sqrt[k]{-\dfrac{\lambda_2}{a_{0k0}}},0\right),\ D\left(0,0,\sqrt[k]{-\dfrac{\lambda_3}{a_{00k}}}\right)$ в предположении, что $a_{k00} a_{0k0} a_{00k} \neq 0.$

Теорема 4. При $k = 2r + 1,\ a_{k00} a_{0k0} a_{00k} \neq 0$ система (5) в пространстве $\square^3$ имеет только четыре изолированные особые точки; из них две –узлы, две –седла.

Доказательство. Пусть $\lambda_1(0) > \lambda_2(0) > \lambda_3(0) > 0,$ тогда

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1(M)=-k\lambda_1(0)<0,\ \lambda_2(M)=-\left[\lambda_1(0)-\lambda_2(0)\right]<0,\\ \lambda_3(M)=-\left[\lambda_1(0)-\lambda_3(0)\right].\end{array}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1(N)=-\left[\lambda_1(0)-\lambda_2(0)\right]>0,\ \lambda_2(N)=-k\lambda_2(0)<0,\\ \lambda_3(M)=-\left[\lambda_2(0)-\lambda_3(0)\right].\end{array}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1(D)=\left[\lambda_1(0)-\lambda_3(0)\right]>0,\ \lambda_2(D)=\left[\lambda_2(0)-\lambda_3(0)\right]<0,\\ \lambda_3(D)=-k\lambda_3(0)>0.\end{array}\right\} \tag{21}$$

На основании неравенств (19). (20), (21) получим, что изолированные особые точки O, M будут узлы, а N, D -седла.

Если предположим, что: $\lambda_1(0)>\lambda_2(0)>0,\ \lambda_3(0)<0,$ то

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1(M)=-k\lambda_1(0)<0,\\ \lambda_2(M)=-\left[\lambda_1(0)-\lambda_2(0)\right]<0,\\ \lambda_3(M)=-\left[\lambda_1(0)-\lambda_3(0)\right]<0.\end{array}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1(N)=\left[\lambda_1(0)-\lambda_2(0)\right]>0,\\ \lambda_2(N)=-k\lambda_2(0)<0,\\ \lambda_3(N)=\left[\lambda_3(0)-\lambda_2(0)\right]<0.\end{array}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1(D)=\left[\lambda_1(0)-\lambda_3(0)\right]>0,\\ \lambda_2(D)=\left[\lambda_2(0)-\lambda_3(0)\right]>0,\\ \lambda_3(D)=-k\lambda_3(0)>0.\end{array}\right\} \tag{24}$$

В силу этих неравенств получим, что часть изолированных особых точек O, N будут седла, а другие M, D -узлы. Что требуется доказать.

Теорема 5. При нечетном k, если $a_{k00}a_{0k0}a_{00k}=0,$ то число изолированных особых точек системы (35) в пространстве $\mathbb{R}^3$ будет три две или одна, причем если система (5) имеет только три изолированные особые точки, то совместно существуют узел два седла или седло и два узла; если система (5) имеет только две особые точки, то возможны случаи: а) два седла, б) два узла, в) узел и седло.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4.

Примечание. В случае $a_{k00}a_{0k0}a_{00k}=0$ исчезающие изолированные особые точки уходят в бесконечность.

Интегрируемость системы (5). Система (5) интегрируется в квадратурах.

В самом деле, например, введя подстановку

$$y_{j+1} = u_j y_1,\ j = 1,2, \qquad (25)$$

получим

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \dfrac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + y_1^{k+1} f^k\left(1, u_1, u_2\right) \\ б)\ \dfrac{du_j}{dt} = \left(\lambda_{j+1} - \lambda_1\right) u_j \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Интегрируя линейную систему (26б) и подставляя в (26а), находим:

$$y^{-k} = e^{-\lambda_1 kt}\left\{C_3 - k\int f^k\left[1, C_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}, C_2 e^{(\lambda_3-\lambda_1)t}\right] e^{\lambda_1 kt}\right\}. \qquad (27)$$

Общее решение системы (5) получим вид

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = e^{\lambda_1 t}\left\{C_3 - k\int f^k\left[1, C_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}, C_2 e^{(\lambda_3-\lambda_1)t}\right] e^{\lambda_1 kt} dt\right\}^{-\frac{1}{k}}, \\ y_{j+1} = C_{j+1} e^{\lambda_{j+1} t}\left\{C_3 - k\int f^k\left[1, C_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}, C_2 e^{(\lambda_3-\lambda_1)t}\right] e^{\lambda_1 kt} dt\right\}^{-\frac{1}{k}}. \end{array}\right\} \qquad (28)$$

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. О кривых определяемых дифференциальными уравнениями. ГТТИ, М.-Л., 1947.
2. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциального уравнения. Минск, Наука и техника, 1972, -650 с.
3. Хусанов Б., Фатхуллаев Ф. Existents of the isolated special points three-dimensional difference systems of a special look. Journal NX, Special Issue №9, 2020, p.239-242.