ДИФФЕРЕНСИАЛ ТЕНГЛАМАНИ ЕЧИШ УЧУН ЧЕКЛИ-АЙИРМАЛАР ВА ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛЛАРИНИНГ ҚИЁСИЙ ТАҲЛИЛИ

Маматов Ш.С. Исроилов Р.З

Шароф Рашидов номидаги Самарқанд давлат университети

Аннотация. *Табиатдаги кўплаб физик жараёнлар дифференциал тенгламалар орқали ифодаланади. Дифференциал тенгламаларни ҳар доим ҳам аналитик усулда ечишнинг имкони бўлавермайди. Шунинг учун турли тақрибий ва сонли усуллардан фойддаланилади. Мазкур ишда турли типдаги дифференциал тенгламаларни ечиш учун қўлланилувчи чекли айирмалар ва чекли элементлар усуллари қиёсий таҳлил қилинади.*

Калит сўзлар: *дифференциал тенглама, матрица, чекли элемент, тўр тугуни*

Агарда

$$q \approx \hat{q} = \sum_{m=1}^{M_q} q_m N_{m,1}, \varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^{M_\varphi} \varphi_m N_{m,2}$$

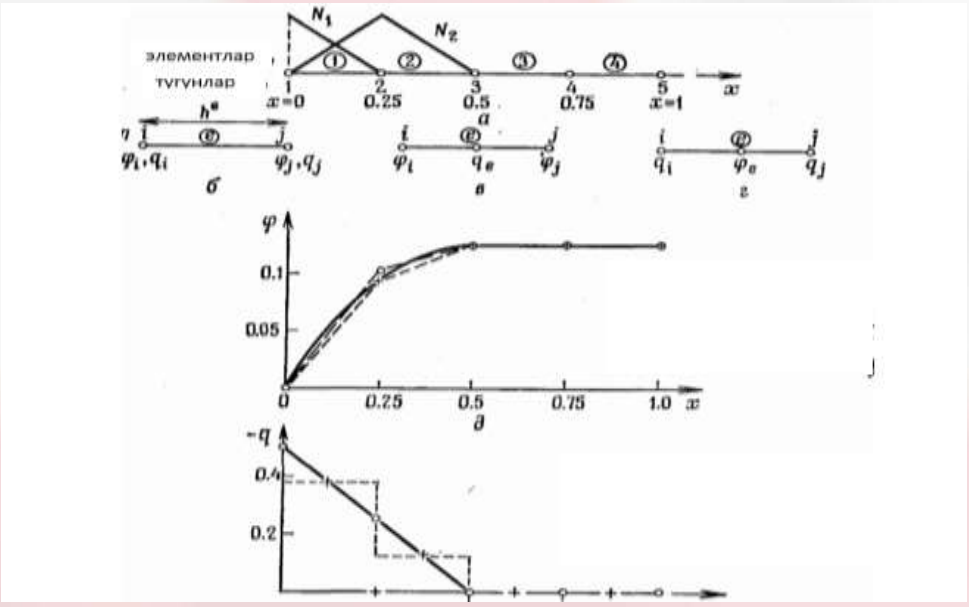
деб фараз килинса, у холда вазнли тафовутлар усулига кўра, бу масала учун

$$\int_0^1 k \frac{d\hat{\varphi}}{dx} N_{l,1} dx + \int_0^1 \hat{q} N_{l,1} dx = 0, l = 1,2,...,M_q$$

$$\int_0^1 \frac{d\hat{q}}{dx} N_{l,2} dx = \int_0^1 Q N_{l,2} dx, l = 1,2,...,M_\varphi$$

ни хосил киламиз.

q ва φ ларни 1.а - расмда кўрсатилгандек чизиқли чекли элементларни билан тасвилашдан фойдаланиб $M_q = M_\varphi = 5$ ва $N_{l,1} = N_{l,2} = N_l$ ни хосил киламиз.



1-расм. *а* – бўлакли-чизиқли $q(б)$ учун қабул қилинган тугунлар ва элементлар тизими

Масалани ечиш. *а* – бўлакли-чизиқли $q(б)$ учун қабул қилинган тугунлар ва элементлар тизими φ , шунингдек, парча-парча чизиқли φ , парча-парча собит $q(e)$ ва парча-парча доимий φ , қисмли чизиқли учун амалга оширилиши керак бўлган ўзгартиришлар $q(г)$. *е* ва ϕ графиклари мос равишда ва q учун тақрибийликларни солиштиради φ .

Сунгра 1.б-расмдаги *е* умумий элементига тўртта q_i, φ_i, q_j ва φ_j тугун ўзгарувчилари мос келади .ва $K\varphi$ га ушбу элементнинг нолга тенг бўлмаган ҳиссаси

$$k^e\varphi^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \left(N_i^e\right)^2 & kN_i^e\frac{dN_i^e}{dx} & N_i^eN_j^e & kN_i^e\frac{dN_j^e}{dx} \\ N_i^e\frac{dN_i^e}{dx} & 0 & N_i^e\frac{dN_j^e}{dx} & 0 \\ N_j^eN_i^e & kN_j^e\frac{dN_i^e}{dx} & \left(N_j^e\right)^2 & kN_j^e\frac{dN_j^e}{dx} \\ N_j^e\frac{dN_i^e}{dx} & 0 & N_j^e\frac{dN_j^e}{dx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \varphi_i \\ q_j \\ \varphi_j \end{bmatrix} dx$$

да сакланган. Интеграллаш орқали берилган масала учун , $k=1$ да

$$k^e = \begin{bmatrix} \frac{h^e}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{h^e}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{h^e}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{h^e}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ни хосил киламиз. $x<1/2$ да $Q=1$ $x\succ 1/2$ $Q=0$, ва тенг *h* узунликдаги тўртта элемент учун матрицани nollashtirish жараёнидан ҳосил бўлади

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{h}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{h}{3}+\frac{h}{3} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{h}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{h}{3}+\frac{h}{3} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{h}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{h}{3}+\frac{h}{3} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{h}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{h}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \varphi_1 \\ q_2 \\ \varphi_2 \\ q_3 \\ \varphi_3 \\ q_4 \\ \varphi_4 \\ q_5 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h}{2} \\ 0 \\ h \\ 0 \\ \frac{h}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ҳосил бўлади

Агар $\varphi_1 = 0, q_5 = 0$ чегара шартлари куйилсаса ва $h = 1/4$ қиймат ишлатилса, бу тенгламалар системаси

$$\varphi_2 = 5/48, \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 1/8,$$
$$q_1 = -1/2, q_2 = -1/4, q_3 = q_4 = 0$$

ечимга эга.

2.*д* ва е расмдан куринадики q аник кийматларда , ифодаланганлигини англатади . $a, \hat{\varphi}$ эса φ учун жуда яхши аппроксимация булади.

Бошқа ёндашувни ҳам кўриб чиқиш мумкин. Вазинли тафовутлар усулининг иккинчи муносабатини булаклаб интеграллаб (ва ишорани ўзгартириб)

$$-\left[\hat{q} N_{l,2}\right]_0^1 + \int_0^1 \hat{q} \frac{dN_{l,2}}{dx} = -\int_0^1 QN_{l,2} dx, l = 1, 2, ..., M_\varphi$$

оламиз. Энди кўриниб турибдики, $\hat{q}$ ни бўлакли-узгармас чекли элементлар билан ифодалаш мумкин, $\hat{\varphi}$ учун бўлакли-чизиқли аппроксимация эса сақланиб қолади. 1.*а* расмдаги тур учун $M_\varphi = 5, M_q = 4$ ва 3.7в расмдаги e умумий элементга мос келадиган учта $\varphi_i, \varphi_j, q_e,$ ўзгарувчи мавжуд . Ушбу ҳолатда

$$k^e \varphi^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_i^e}{dx} & 0 \\ \frac{dN_i^e}{dx} & 1 & \frac{dN_i^e}{dx} \\ 0 & \frac{dN_i^e}{dx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ q_e \\ \varphi_j \end{bmatrix} dx$$

ва шундай қилиб,

$$k^e = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & h^e & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Элементларнинг матрицаларини ансамбллаштиришни амалга ошириб

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & h & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & h & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & h & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ q_1 \\ \varphi_2 \\ q_2 \\ \varphi_3 \\ q_3 \\ \varphi_4 \\ q_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h/2 - \hat{q}\big|_{x=0} \\ 0 \\ -h \\ 0 \\ -h/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

тенгламалар системасини оламиз ва уни ечиб

$$\varphi_2 = 3/32, \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 1/8,$$
$$q_1 = -3/8, q_2 = -1/8, q_3 = q_4 = 0$$

ни хосил киламиз.

1.*д ва е* расмда кўрсатилганидек , бу усул φ ва q нинг тугунлардаги аниқ қийматларини такрорлайди.. Биринчи тенгламадан $\hat{q}\Big|_{x=0} = -1/2$ ни қийматини топиши мумкин ., бу ҳам аниқ кийматдир.

Ва ниҳоят, вазнли тафовутлар усулининг биринчи муносабатида булаклаб интеграллашдан фойдаланиш мумкин. У холда $\hat{\varphi}$ ни бўлакли-узгармас тасвирлаш мумкин., ва $\hat{q}$ ни бўлак-чизиқли тасвирлаш мумкун (1-расм, *д*).

Юкорида бажарилган хисоблашларни жадвалларга жойлаштирамиз:

1-жадвал

$d^2\varphi/dx^2 - \varphi = 0$ тенгламанинг $x=0$ да $\varphi=0$, $x=1$ да $\varphi=1$ чегара шартларини қаноатлантирадиган ечимини топиш талаб қилинсин.				
φ	Чекли-айирмалар ($\Delta x = 1/3$) усули	Чекли-айирмалар ($\Delta x = 1/6$) усули	Чекли-элементлар Усули $h = 1/3$	Хакикий ечим
φ_1	0	0	0	0
φ_2	0,2893	0,2890	0,2885	0,28892
φ_3	0,6107	0,6104	0,6098	0,61024
φ_4	1	1	1	1

2-жадвал

$d^2\varphi/dx^2 - \varphi = 0$ тенгламанинг $x=0$ да $\varphi=0$ ва $x=1$ да $d\varphi/dx=1$ чегара шартларини қўямиз ечимини топамиз.			
φ	Чекли-айирмалар ($\Delta x = 1/3$) усули	Чекли-элементлар усули $h = 1/3$	Хакикий ечим
φ_1	0	0	0
φ_2	0,2477	0,2193	0,2200
φ_3	0,5229	0,4634	0,4648
φ_4	0,8563	0,7600	0,7616

Бу иккита жадвалнинг тахли килиб хакикий ечимга якинлашадиган усулни танлашимиз мумкин,

3-жадвал

Иккинчи даражали иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси $k(d^2\varphi/dx^2)+Q=0$ ва унга эквивалент тенгламалар системаси $k(d\varphi/dx)+q=0$, $dq/dx-Q=0$			
φ	Чекли-элементлар усули $h=1/4$ φ ва q булакли-чизикли	Чекли-элементлар усули $h=1/4$ φ булакли-чизикли ва q булакли-узгармас	Хакикий ечим
φ_1	0	0	0
φ_2	5/48	3/32	0.104
φ_3	1/8	1/8	0.125
φ_4	1/8	1/8	0.127
φ_5	1/8	1/8	1/8
q_1	-1/2	-3/8	-1/2
q_2	-1/4	-1/8	-1/4
q_3	0	0	0
q_4	0	0	0
q_5	0	0	0

Жадвалдан куринадики φ ва q *булакли-чизикли* булганда q аник топилади , $\hat{\varphi}$ нинг кийматлари φ учун яхши аппроксимация булади. φ *булакли-чизикли* ва q *булакли-узгармас* булганда φ ва q кийматлари аник топилади